1

プロセスデータからのモデリング

京都大学　加納 学

Division of Process Control & Process Systems Engineering
Department of Chemical Engineering, Kyoto University

manabu@cheme.kyoto-u.ac.jp
http://www-pse.cheme.kyoto-u.ac.jp/~kano/

内容

2

- プロセスモデルの構築
- ステップ応答からの伝達関数モデルの構築
- 最小二乗法
- 離散時間モデルの同定
- 閉ループ系の同定

プロセスモデルの種類

3

- 物理モデル（現象論的モデル）
  物理や化学の法則に基づいて化学プロセスの動特性を一連の微分方程式や代数方程式で表現するモデル
- ブラックボックスモデル（統計的モデル）
  プロセスの運転データから導出されるモデル
  例えば，操作変数を人為的に変化させることによって，操作変数が制御変数に与える影響を知ることができるため，そのときの入出力データからモデルを構築できる．

  システム同定：入出力データから統計的モデルを構築すること
- グレイボックスモデル＝現象論的モデル＋統計的モデル

状態変数と状態方程式

4

- プロセスの動特性を表現するためには，プロセスの状態を表す変数（状態変数）とその時間的変化を表す数式（状態方程式）が必要である．

  例）物質収支式や熱収支式などのプロセス方程式

  状態方程式 $\dfrac{dx}{dt} = f(x,u)$　　状態変数 x
- 初期状態 x_0 と入力 u が与えられれば，プロセスの状態が変化する様子を知ることができる．

プロセス方程式から状態方程式へ

5

- プロセス方程式が 1 階微分方程式で与えられるとは限らないが，状態変数の 1 階から n-1 階微分までを状態変数に加えることにより，1 階微分方程式に変形できる．

$$\frac{d^2y}{dt^2} + a\frac{dy}{dt} = g(y,u)$$

$$x_1 = y, \quad x_2 = \frac{dy}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ g(x_1,u) - ax_2 \end{bmatrix}$$

定常状態と非定常状態

6

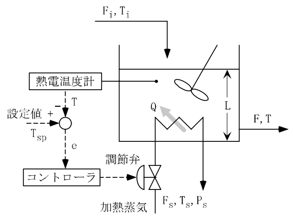
- 定常状態
  状態変数が時間的に変化しない状態

$$0 = f(\tilde{x},\tilde{u})$$

- 非定常状態
  状態変数が時間的に変化する状態

$$\frac{dx}{dt} = f(x,u)$$

例題： 槽型加熱器のモデル化 (7)



物質収支 $$\rho A\frac{dL}{dt} = \rho F_i - \rho F$$

エネルギー収支 $$\rho c_p A\frac{d(LT)}{dt} = \rho c_p F_i T_i - \rho c_p FT + Q$$

例題： 槽型加熱器のモデル化 (8)

物質収支 $$A\frac{dL}{dt} = F_i - F$$

エネルギー収支 $$A\frac{d(LT)}{dt} = F_i T_i - FT + \frac{Q}{\rho c_p}$$

$$A\frac{d(LT)}{dt} = AL\frac{dT}{dt} + AT\frac{dL}{dt} = AL\frac{dT}{dt} + T(F_i - F)$$

$$AL\frac{dT}{dt} = F(T_i - T) + \frac{Q}{\rho c_p}$$

例題： 槽型加熱器のモデル化 (9)

状態方程式

$$A\frac{dL}{dt} = F_i - F$$

$$AL\frac{dT}{dt} = F(T_i - T) + \frac{Q}{\rho c_p}$$

状態変数

L

T

線形化 (10)

- 化学プロセスの物理モデルの多くは非線形微分方程式で与えられる．しかし，プロセスが狭い条件範囲で運転される場合には，線形モデルによって非線形モデルを十分な精度で近似できる．
- プロセスをある定常状態に保つことが目的である場合には，その定常点周りでのプロセスの動特性は線形近似したモデルを用いて表現できるため，その線形モデルに基づいて制御系を設計すればよい．
- 近年，反応器など非線形性が強く，かつ高い制御性能を要求されるプロセスに対して，非線形モデルに基づくモデル予測制御の適用などが進められている．

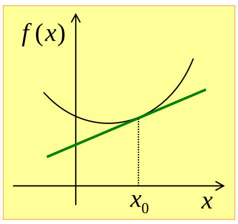
線形化 (11)

テイラー展開

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)\frac{x - x_0}{1!} + f^{(2)}(x_0)\frac{(x-x_0)^2}{2!} + \cdots$$
$$+ f^{(n)}(x_0)\frac{(x-x_0)^n}{n!} + \cdots$$

2次以上の項を無視

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$



例題： 物質収支式の線形化 (12)

$$A\frac{dL}{dt} = F_i - a\sqrt{L}$$

$$\sqrt{L} \approx \sqrt{\tilde{L}} + \frac{1}{2\sqrt{\tilde{L}}}(L - \tilde{L})$$

$$A\frac{dL}{dt} = F_i - a\sqrt{\tilde{L}} - \frac{a}{2\sqrt{\tilde{L}}}(L - \tilde{L})$$

定常値からの変化量に着目

13

定常値からの変化量

$$\delta x = x - \tilde{x}$$

状態方程式の線形近似

$$\frac{dx}{dt} = f(x) \approx f(\tilde{x}) + f'(\tilde{x})(x - \tilde{x})$$

定常状態

$$0 = \frac{d\tilde{x}}{dt} = f(\tilde{x})$$

$$\frac{d\delta x}{dt} = f'(\tilde{x})\delta x$$

例題：物質収支式の表現

14

定常値からの変化量 $\delta L = L - \tilde{L}$

物質収支式 $A\dfrac{dL}{dt} = F_i - a\sqrt{\tilde{L}} - \dfrac{a}{2\sqrt{\tilde{L}}}(L - \tilde{L})$

定常状態 $0 = \tilde{F}_i - a\sqrt{\tilde{L}}$

$$A\frac{d\delta L}{dt} = \delta F_i - \frac{a}{2\sqrt{\tilde{L}}}\delta L = \delta F_i - \frac{\tilde{F}_i}{2\tilde{L}}\delta L$$

撹拌槽型加熱器の線形モデル

15

$$A\frac{d\delta L}{dt} = \delta F_i - \frac{\tilde{F}_i}{2\tilde{L}}\delta L$$

$$AL\frac{d\delta T}{dt} = \tilde{F}_i(\delta T_i - \delta T) + \delta F_i(\tilde{T}_i - \tilde{T}) + \frac{\delta Q}{\rho c_p}$$

状態空間表現

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}\delta L\\ \delta T\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{\tilde{F}_i}{2A\tilde{L}} & 0 \\ 0 & -\dfrac{\tilde{F}_i}{AL}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\delta L\\ \delta T\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\dfrac{1}{A} & 0 & 0 \\ \dfrac{\tilde{T}_i - \tilde{T}}{AL} & \dfrac{\tilde{F}_i}{AL} & \dfrac{1}{\rho c_p AL}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\delta F_i\\ \delta T_i\\ \delta Q\end{bmatrix}$$

内容

16

- プロセスモデルの構築
- ステップ応答からの伝達関数モデルの構築
- 最小二乗法
- 離散時間モデルの同定
- 閉ループ系の同定

伝達関数

17

線形微分方程式

$$a_n\frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1\frac{dy}{dt} + a_0 y$$
$$= b_m\frac{d^m u}{dt^m} + b_{m-1}\frac{d^{m-1}u}{dt^{m-1}} + \cdots + b_1\frac{du}{dt} + b_0 u$$

ラプラス変換

伝達関数

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}$$

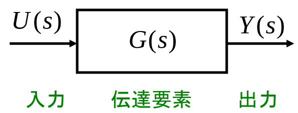
- 定常値からの変化量で表現，初期条件=0

伝達関数とブロック線図

18

伝達関数 $G(s) = \dfrac{Y(s)}{U(s)}$

ブロック線図



例題：物質収支式のラプラス変換

線形微分方程式 $A\dfrac{d\delta L}{dt} = \delta F_i - \dfrac{\tilde{F}_i}{2\tilde{L}}\delta L$

ラプラス変換

$$\left(As + \frac{\tilde{F}_i}{2\tilde{L}}\right)\delta L(s) = \delta F_i(s)$$

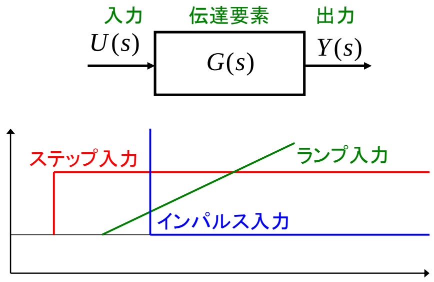
伝達関数

$$G(s) = \frac{\delta L(s)}{\delta F_i(s)} = \frac{\dfrac{2\tilde{L}}{\tilde{F}_i}}{\dfrac{2A\tilde{L}}{\tilde{F}_i}s+1}$$

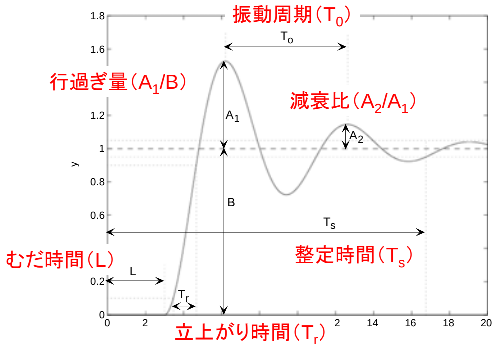
1次遅れ $\dfrac{K}{Ts+1}$

過渡応答

- 過渡応答
  入力の変化に対する出力の時間的変化



過渡応答の特徴

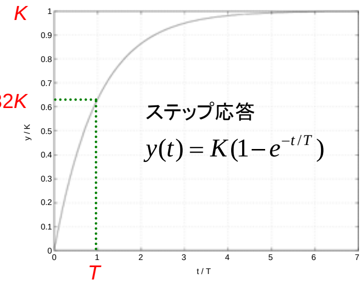


1次遅れ要素

1次遅れ要素

$$G(s) = \frac{K}{Ts+1}$$

K 定常ゲイン
T 時定数



$$y(t) = K(1-e^{-t/T})$$

- 新しい定常状態における出力値はKである．
- 時定数Tに等しい時間が経過すると，出力の変化幅は最終的な変化幅の63.2%に達する．

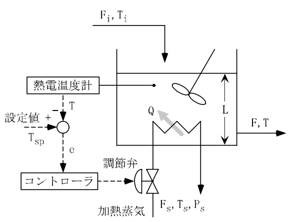
例題1.1

伝達関数

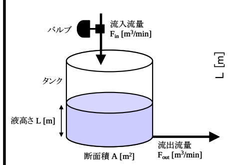
$$G(s) = \frac{\delta L(s)}{\delta F_i(s)} = \frac{\dfrac{2\tilde{L}}{\tilde{F}_i}}{\dfrac{2A\tilde{L}}{\tilde{F}_i}s+1}$$

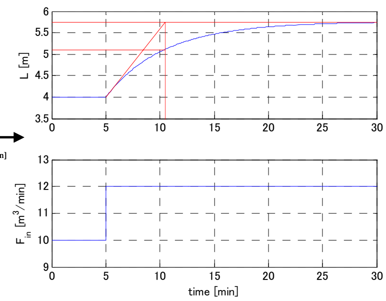
定常ゲイン
時定数

1次遅れ $\dfrac{K}{Ts+1}$



例題1.1





$$K = \frac{y^*}{u^*} = \frac{1.75}{2.0} = 0.875$$

$$T = t_{63.2\%} - t_0 = 10.5 - 5.0 = 5.5$$

$$P(s) = \frac{0.875}{5.5s+1}$$

1次遅れ＋むだ時間要素

25

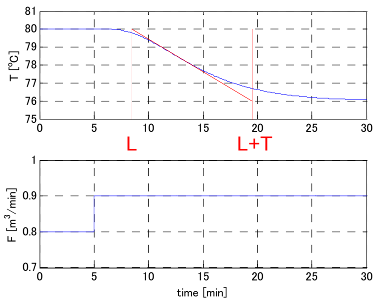
$$P(s)=\frac{K}{Ts+1}e^{-Ls}$$

プロセスが，このモデルで正確に表現されるわけではない．

むだ時間を持つプロセスや，高次遅れプロセスを，このような単純な伝達関数で表現しましょうということ．

接線法

26



$$K=\frac{y^*}{u^*}=\frac{-4.0}{0.1}=-40$$

$$L=3.5,\ L+T=14.5$$

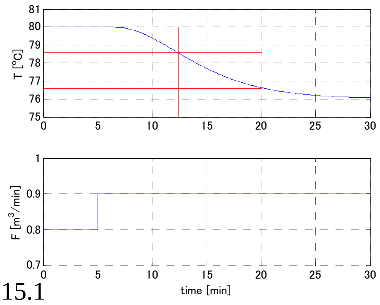
$$P(s)=\frac{-40}{11s+1}e^{-3.5s}$$

二点法（1）

27

35.3%

85.3%



$$t_{35.3\%}=7.4,\ t_{85.3\%}=15.1$$

$$T=0.67(t_{85.3\%}-t_{35.3\%})=5.2$$

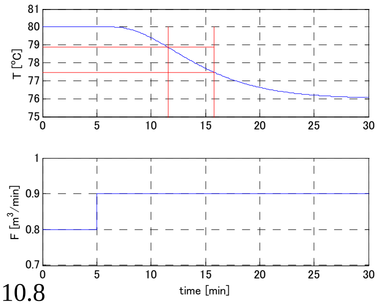
$$L=1.3t_{35.3\%}-0.29t_{85.3\%}=5.2$$

二点法（2）

28

28.3%

63.2%



$$t_{28.3\%}=6.6,\ t_{63.2\%}=10.8$$

$$T=1.5(t_{63.2\%}-t_{28.3\%})=6.3$$

$$L=1.5t_{28.3\%}-0.5t_{63.2\%}=4.5$$

比較

29

接線法

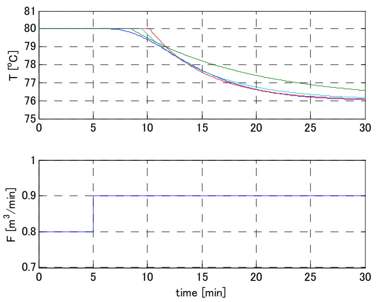
$$\frac{-40}{11s+1}e^{-3.5s}$$

二点法（1）

$$\frac{-40}{5.2s+1}e^{-5.2s}$$

二点法（2）

$$\frac{-40}{6.3s+1}e^{-4.5s}$$



比較

30

接線法 $\frac{-40}{11s+1}e^{-3.5s}$

むだ時間の近似は良いが，全体として精度が悪い

二点法（1） $\frac{-40}{5.2s+1}e^{-5.2s}$

二点法（2） $\frac{-40}{6.3s+1}e^{-4.5s}$

二点の情報を利用するため，全体を近似するのに有利

内容 31

- プロセスモデルの構築
- ステップ応答からの伝達関数モデルの構築
- 最小二乗法
- 離散時間モデルの同定
- 閉ループ系の同定

標準化 32

各変数を平均0，分散1の変数に変換する．

$$x_{nm} = \frac{x^*_{nm} - \bar{x}_m}{\sigma_m}$$

変数 m
サンプル n

平均

$$\bar{x}_m = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} x^*_{nm}$$

分散

$$\sigma_m^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{n=1}^{N}(x^*_{nm} - \bar{x}_m)^2$$

準備 33

入力変数　出力変数

測定データ

$$X^* = \begin{bmatrix} x^*_{11} & x^*_{12} & \cdots & x^*_{1M} \\ x^*_{21} & x^*_{22} & \cdots & x^*_{2M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x^*_{N1} & x^*_{N2} & \cdots & x^*_{NM} \end{bmatrix} \quad Y^* = \begin{bmatrix} y^*_{11} \\ y^*_{21} \\ \vdots \\ y^*_{N1} \end{bmatrix}$$

標準化データ

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1M} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{N1} & x_{N2} & \cdots & x_{NM} \end{bmatrix} \quad Y = \begin{bmatrix} y_{11} \\ y_{21} \\ \vdots \\ y_{N1} \end{bmatrix}$$

重回帰分析：設定 34

いま，出力変数 y の推定値を入力変数の線形結合

$$\hat{y} = \sum_{m=1}^{M} a_m x_m$$

で与えたい．このとき，出力変数の測定値と推定値との差

$$e = y - \hat{y} = y - \sum_{m=1}^{M} a_m x_m$$

の二乗和が最小となるように，偏回帰係数 a_m を決定せよ．

重回帰分析：必要条件 35

誤差の二乗和

$$J = \sum_{n=1}^{N} e^2 = \sum_{n=1}^{N}(y_n - \hat{y}_n)^2$$
$$= (Y - Xa)^T (Y - Xa)$$

$$a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_M \end{bmatrix}$$

必要条件（Jが最小となるための）

$$\frac{\partial J}{\partial a} = 0$$

重回帰分析：正規方程式 36

$$\frac{\partial J}{\partial a} = \begin{bmatrix} \frac{\partial J}{\partial a_1} \\ \frac{\partial J}{\partial a_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial J}{\partial a_M} \end{bmatrix} = 2(X^T Xa - X^T Y) = 0$$

正規方程式　$X^T Xa - X^T Y = 0$

偏回帰係数　$a = (X^T X)^{-1} X^T Y$

重回帰分析：重回帰式

$$\hat{y} = \sum_{m=1}^{M} a_m x_m$$

a_m 標準偏回帰係数

$\dfrac{a_m \sigma_y}{\sigma_m}$ 偏回帰係数

$$\frac{\hat{y}^* - \bar{y}}{\sigma_y} = \sum_{m=1}^{M} a_m \frac{x_m^* - \bar{x}_m}{\sigma_m}$$

$$\hat{y}^* = \sum_{m=1}^{M} \frac{a_m \sigma_y}{\sigma_m} x_m^* + \left(\bar{y} - \sum_{m=1}^{M} \frac{a_m \sigma_y}{\sigma_m} \bar{x}_m \right)$$

内容

- プロセスモデルの構築
- ステップ応答からの伝達関数モデルの構築
- 最小二乗法
- 離散時間モデルの同定
- 閉ループ系の同定

離散時間伝達関数

離散時間伝達関数

$$G(q) = \frac{B(q)}{A(q)} = \frac{b_1 q^{-1} + b_2 q^{-2} + \cdots + b_m q^{-m}}{1 + a_1 q^{-1} + a_2 q^{-2} + \cdots + a_n q^{-n}}$$

遅延演算子

$$q^{-1} x(t) = x(t-1)$$

離散時間モデル

Box-Jenkinsモデル $\quad y(t) = \dfrac{B(q)}{A(q)} u(t) + \dfrac{C(q)}{D(q)} e(t)$

出力誤差モデル $\quad y(t) = \dfrac{B(q)}{A(q)} u(t) + e(t)$

ARXモデル $\quad A(q) y(t) = B(q) u(t) + e(t)$

ARMAXモデル $\quad A(q) y(t) = B(q) u(t) + C(q) e(t)$

1次遅れ要素の離散化

伝達関数 $\quad P(s) = \dfrac{K}{Ts+1}$

微分方程式 $\quad T \dfrac{dy}{dt} + y = Ku$

差分方程式 $\quad T \dfrac{y(k) - y(k-1)}{\Delta t} + y(k-1) = Ku(k-1)$

$$y(k) = \left(1 - \frac{\Delta t}{T}\right) y(k-1) + \frac{K \Delta t}{T} u(k-1)$$

1次遅れ要素の離散化

差分方程式 $\quad y(k) = \left(1 - \dfrac{\Delta t}{T}\right) y(k-1) + \dfrac{K \Delta t}{T} u(k-1)$

Δt の取り方によっては大きな誤差が生じる

ゼロ次ホールドの前提下で，厳密な離散モデル

$$y(k) = e^{-\Delta t / T} y(k-1) + K(1 - e^{-\Delta t / T}) u(k-1)$$

ARXモデル

2遅れ要素の離散化 43

$$P(s)=\frac{K(T_n s+1)}{(T_1 s+1)(T_2 s+1)}$$

ゼロ次ホールドの前提下で，厳密な離散モデル

$$y(k)=a_1 y(k-1)+a_2 y(k-2)+b_1 u(k-1)+b_2 u(k-2)$$

$$a_1=e^{-\Delta t/T_1}+e^{-\Delta t/T_2} \qquad K=\frac{b_1+b_2}{1-a_1-a_2}$$

$$a_2=-e^{-\Delta t/T_1}+e^{-\Delta t/T_2}$$

$$b_1=K\left(1+\frac{T_n-T_1}{T_1-T_2}e^{-\Delta t/T_1}+\frac{T_2-T_n}{T_1-T_2}e^{-\Delta t/T_2}\right)$$

$$b_2=K\left(e^{-\Delta t/T_1-\Delta t/T_2}+\frac{T_n-T_1}{T_1-T_2}e^{-\Delta t/T_2}+\frac{T_2-T_n}{T_1-T_2}e^{-\Delta t/T_1}\right)$$

予測誤差法 44

ARXモデル $A(q)y(t)=B(q)u(t)+e(t)$

$$y(t)=(1-A(q))y(t)+B(q)u(t)+e(t)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}a_i y(t-i)+\sum_{i=1}^{m}b_i u(t-i)+e(t)$$

予測値 $\hat{y}(t)=(1-A(q))y(t)+B(q)u(t)$

予測誤差 $\varepsilon(t)=y(t)-\hat{y}(t)=A(q)y(t)-B(q)u(t)$

$$=y(t)-\boldsymbol{\varphi}(t)\boldsymbol{\theta}$$

予測誤差法 45

予測誤差 $\varepsilon(t)=y(t)-\hat{y}(t)=A(q)y(t)-B(q)u(t)$

$$=y(t)-\boldsymbol{\varphi}(t)\boldsymbol{\theta}$$

$$\boldsymbol{\varphi}(t)=\begin{bmatrix}-y(t-1) & \cdots & -y(t-n) & u(t-1) & \cdots & u(t-m)\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\theta}=\begin{bmatrix}a_1 & \cdots & a_n & b_1 & \cdots & b_m\end{bmatrix}^T$$

$$\boldsymbol{\theta}=(\boldsymbol{\Phi}^T\boldsymbol{\Phi})^{-1}\boldsymbol{\Phi}^T\mathbf{y}$$

最小二乗法によって，離散時間伝達関数および
連続時間伝達関数を同定できる．

2次遅れ要素の同定 46

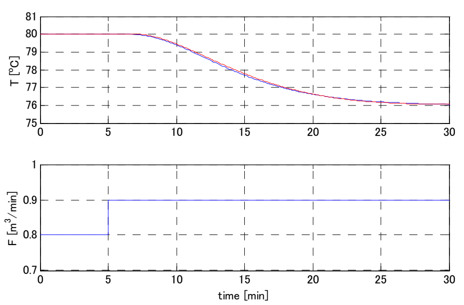
$$y(k)=a_1 y(k-1)+a_2 y(k-2)+b_1 u(k-1)+b_2 u(k-2)$$

$$y=\begin{bmatrix}y(3)\\ y(4)\\ \vdots\\ y(N)\end{bmatrix},\ X=\begin{bmatrix}y(2) & y(1) & u(2) & u(1)\\ y(3) & y(2) & u(3) & u(2)\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ y(N-1) & y(N-2) & u(N-1) & u(N-2)\end{bmatrix}$$

$$\theta=\begin{bmatrix}a_1\\ a_2\\ b_1\\ b_2\end{bmatrix} \qquad y=X\theta$$

$$\theta=(X^T X)^{-1}X^T y$$

例題3.1 47



$$P(s)=\frac{-38.6}{22.8s^2+7.4s+1}e^{-2s}$$

内容 48

- プロセスモデルの構築
- ステップ応答からの伝達関数モデルの構築
- 最小二乗法
- 離散時間モデルの同定
- 閉ループ系の同定

閉ループ系の同定

49

資料参照

同定用信号（設定値変更でも良い）を付加しなければ，
プロセスのモデルは同定できない．

同定用信号（設定値変更でも良い）を付加するなら，
どの方法を用いても大差ない結果が得られるだろう．

おわり

50